ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 4 - Twierdzenie Baire'a

1. Uzasadnić, że zbiór Cantora jest zbiorem nigdziegęstym w $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ z topologią zadaną przez zwykłą metrykę.

2. Uzasadnić, że każda prosta jest zbiorem nigdziegęstym w $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ z topologią zadaną przez metrykę Euklidesową.

3. Uzasadnić, że skończenie wymiarowa właściwa podprzestrzeń liniowa unormowanej przestrzeni liniowej X jest zbiorem nigdziegęstym w X.

4. Uzasadnić, że domknięta właściwa podprzestrzeń liniowa unormowanej przestrzeni liniowej X jest zbiorem nigdziegęstym w X.

5. Pokazać, że jeżeli A, B są zbiorami nigdziegęstymi w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, to $A \cup B$ jest także zbiorem nigdziegęstym w $(X, \mathcal{T})$. Wywnioskować twierdzenie dla skończonych sum. Czy jest prawdziwe analogiczne twierdzenie dla przeliczalnych sum?

6. Uzasadnić, że zbiór otwarty A jest gęsty w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ wtedy i tylko wtedy gdy $X \setminus A$ jest domknięty i nigdziegęsty w $(X, \mathcal{T})$.

7. Niech A będzie domkniętym podzbiorem w unormowanej przestrzeni liniowej X. Uzasadnić, że A jest nigdziegęsty w X wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x \in A$ i każdego $\epsilon > 0$ istnieje $y \notin A$, taki że $\| x - y \| \leq \epsilon$.

8. Pokazać, że jeśli A jest zbiorem pierwszej kategorii w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ oraz $B \subset A$, to B jest także zbiorem pierwszej kategorii w $(X, \mathcal{T})$.

9. Pokazać, że przeliczalna suma podzbiorów pierwszej kategorii w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest zbiorem pierwszej kategorii w $(X, \mathcal{T})$.

10. Uzasadnić, że zbiór wielomianów jest zbiorem pierwszej kategorii w unormowanej przestrzeni liniowej $C[0, 1]$ (z normą supremum).

11. Korzystając z Twierdzenia Baire'a, uzasadnić, że dopełnienie A^c zbioru pierwszej kategorii A w zupełnej przestrzeni metrycznej X jest zbiorem drugiej kategorii.

12. Korzystając z Twierdzenia Baire'a, uzasadnić, że nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha nie ma przeliczalnej bazy algebraicznej.

13. Korzystając z Twierdzenia Baire'a pokazać, że zupełna przestrzeń metryczna X jest przestrzenią Baire'a, co oznacza, że jeżeli zbiór G jest postaci

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

gdzie każdy G_n jest otwarty i gęsty w X, to G jest gęsty w X. Jest to twierdzenie, które uznaje się także za jedną z wersji twierdzenia Baire'a.

R. Lenczewski